الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

البكالوريا التجريبية

امتحان تجريبي التعليم الثانوي   **الشعبة : رياضيات**   **دورة: جوان 2025**

اختبار في مادة: الرياضيات   **المدة: 04 سا و 30 د**

على المترشح أن يختار احد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول : (04 نقاط)

لتكن (u_n) المتتالية المعرّفة بحدّها الأوّل $u_0 = 0$ و من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \sqrt{3 + (1-\alpha^2)u_n^2}$ ، حيث $0 < \alpha < 1$.

1. برهن بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n ، : $0 \leq u_n \leq \dfrac{\sqrt{3}}{\alpha}$.
2. أ) بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n ، : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-\alpha^2\left(u_n^2 - \dfrac{3}{\alpha^2}\right)}{\sqrt{3+(1-\alpha^2)u_n^2} + u_n}$.

   ب) برّر أنّ المتتاليّة (u_n) متزايدة تماما ثمّ استنتج أنّها متقاربة .
3. (v_n) المتتالية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ ، $v_n = u_n^2 - \dfrac{3}{\alpha^2}$.

   أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسيّة أساسها $(1-\alpha^2)$ يطلب حساب حدّها الأوّل بدلالة α .

   ب) أكتب عبارة v_n بدلالة n ثمّ بيّن أنّه من أجل كلّ $n \in \mathbb{N}$ ، $u_n = \dfrac{\sqrt{3}}{\alpha}\sqrt{1-(1-\alpha^2)^n}$ ثمّ أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ بدلالة α .
4. أ) أحسب بدلالة n و α المجموع S_n حيث : $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n$.

   ب) من أجل كلّ عدد طبيعي n نضع $T_n = u_0^2 + u_1^2 + \cdots + u_n^2$.

   – بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $T_n = S_n + (n+1)\dfrac{3}{\alpha^2}$ ثمّ أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_n}{n}$ بدلالة α .

التمرين الثاني : (05 نقاط)

I. ليكن α عددا طبيعيّا حيث : $6 \leq \alpha < 10$. و ليكن N عددا طبيعيّا يكتب $\overline{10404}$ في نظام التعداد الذي أساسه α و يكتب أيضا $\overline{2644}$ في نظام التعداد الذي أساسه $\alpha + 2$.

1. بيّن أنّ α يحقق المعادلة $\alpha\left(\alpha^3 - 2\alpha^2 - 14\alpha - 52\right) = 48$.
2. جد قيمة α ثمّ أكتب العدد $N + 2$ في النظام العشري .

II. نضع $\alpha = 6$ ، و نعتبر المعادلة $(E) : Nx - 1805y = 3249$ حيث x و y عددان صحيحان .

1. حدّد $PGCD(N; 1805)$ ثمّ بيّن أنّ المعادلة (E) تقبل على الأقل حلّا .

2. أ) بيّن أنّ المعادلة (E) تكافئ المعادلة (E') حيث $(E') : 4x - 5y = 9$.

ب) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E') . (لاحظ أنّ $4 + 5 = 9$) .

جـ) ليكن $(x;y)$ حلا للمعادلة (E') و x و y عددان طبيعيان .

– حدّد القيم الممكنة لـ $PGCD(x;y)$ ثمّ جد الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E') حيث $PGCD(x;y) = 3$.

3. أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الاقليدية للعدد 4^n على 7 .

ب) بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n العدد $n^3 - n$ يقبل القسمة على 3 .

جـ) من أجل كلّ عدد طبيعي n حدّد باقي قسمة العدد $4^N + 4^{n^3-n+2025}$ على 7 .

التمرين الثالث : (04 نقاط)

كيس غير شفاف يحتوي على 10 كريّات متماثلة لا نفرّق بينها باللّمس منها ثلاث كريّات بيضاء مرقمة بـ 0 ، π ، $\frac{\pi}{2}$ ، و خمس كريّات حمراء مرقمة بـ 0 ، 0 ، $\frac{\pi}{2}$ ، π ، π و كريّتين سوداوين مرقّمتان بـ π ، $\frac{\pi}{2}$. نسحب من الكيس كريّتين على التوالي مع الإرجاع

1. أحسب احتمال تحقق الأحداث التالية :

A : "الحصول على كريتين مختلفتين في اللون" ، B : "الكرية المسحوبة الأولى حمراء " ، C : "سحب كريتين مجموع رقميهما يساوي π "

2. بين أنّ $P(B \cap C) = \dfrac{4}{25}$ ثمّ استنتج $P(\overline{B \cup C})$ و $P_C(B)$.

3. ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكلّ سحب كريتين العدد $\cos(\alpha + \beta)$ حيث α هو الرقم المحصّل عليه في السحبة الأولى و β هو الرقم المحصل عليه في السحبة الثانية .

أ) برّر أنّ قيم المتغيّر العشوائي X هي $\{-1;0;1\}$ ثمّ عرّف قانون احتماله .

ب) أحسب $E(X)$ الأمل الرياضياتي للمتغيّر العشوائي X ثمّ استنتج $V(-2X + 2025)$.

جـ) أحسب $P(|X| + 1 \equiv 0[2])$.

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I. g الدالّة العدديّة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x) = x - 2\ln(x)$.

1. أ) أدرس اتجاه تغيّر الدالّة g ثمّ بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $g(x) > 0$.

2. α عدد حقيقي و لتكن f_α الدالّة المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f_\alpha(x) = \alpha \ln x - \dfrac{(\ln x)^2}{x}$ ، (C_α) المنحنى البياني للدالّة f_α في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

– بيّن أنّ جميع المنحنيات (C_α) تشمل نقطة ثابتة A يطلب تحديد إحداثياتها .

II. في كلّ ما يلي نضع $\alpha = 1$ و نرمز بـ f إلى الدالّة f_1 و بالرمز (C_f) إلى المنحنى (C_1) .

1. أ) أحسب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$ ثمّ فسّر النتيجة بيانيا .

ب) بيّن أنّه من أجل كلّ $x > 0$: $\dfrac{(\ln x)^2}{x} = 4\left(\dfrac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$ ثمّ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2. أ) بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي $x > 0$ ، $f'(x) = \dfrac{g(x) + (\ln x)^2}{x^2}$.

ب) استنتج إتجاه تغيّر الدالّة f على المجال $]0; +\infty[$ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها .

3. ليكن (Γ) التمثيل البياني للدالّة $x \mapsto \ln x$ على المجال $]0; +\infty[$.

أ) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - \ln x]$ و فسّر النتيجة بيانيّا .

ب) أدرس الوضعيّة النسبيّة بين (C_f) و (Γ) ثمّ بيّن أنّ لهما مماسا مشتركا يطلب تحديد معادلة له .

4. أ) أرسم (Γ) ثمّ (C_f) .

ب) باستعمال مكاملة بالتجزئة جد الدالّة الأصليّة للدالّة $x \mapsto \ln x$ على $]0; +\infty[$ و التي تنعدم عند القيمة 1 .

جـ) أحسب مساحة الحيّز المستوي المحدّد بـ (C_f) و محور الفواصل و المستقيمين اللّذين معادلتيهما : $x = 1$ و $x = e$.

إنتهى الموضوع الأوّل

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (04 نقاط)

1. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2 + 2\sqrt{2}z + 8 = 0$ ثمّ استنتج مجموعة حلول المعادلة $(\overline{z-i})^2 + 2\sqrt{2}(\overline{z-i}) + 8 = 0$.

2. في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ نعتبر النقطتين A و B ذات اللاحقتين $a = -\sqrt{2} + i\sqrt{6}$ و $b = \sqrt{3} - 1 + i(\sqrt{3}+1)$.

   أ) أحسب طويلة و عمدة العدد a ثمّ بيّن أنّ $a = 2\sqrt{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

   ب) تحقق أنّ : $b = e^{-i\frac{\pi}{4}} \times a$ ثمّ بيّن أنّ $b = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right]$.

   ج) استنتج القيمة المضبوطة لكلّ من $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

3. أكتب على الشكل الجبري العدد $\left(\frac{a}{2\sqrt{2}}\right)^{1446} + \left(\frac{b}{2\sqrt{2}}\right)^{2025}$.

4. C النقطة ذات اللاحقة $c = \sqrt{6} + i\sqrt{2}$. - بيّن أنّ $\frac{a}{c} = i$ ثمّ استنتج طبيعة المثلث OAC .

التمرين الثاني : (05 نقاط)

1. لتكن (E) المعادلة ذات المجهولين الصّحيحين x و y حيث : $570x - 135y = 1005 \cdots (E)$.

   أ) جد القاسم المشترك الأكبر للعددين 570 و 135 ، ثمّ استنتج أنّ المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$.

   ب) بيّن أنّه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلّا للمعادلة (E) فإنّ $x \equiv 2[9]$ ، ثمّ حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) .

2. أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليديّة للعدد 5^n على 11 .

   ب) جد قيم العدد الطبيعي n التي تحقق $5n^2 - 1446^{2025} + 1446^{3x+y} \equiv 0[11]$ حيث $(x;y)$ حل طبيعي للمعادلة (E) .

3. ليكن n عدد طبيعي و $A = 9n + 2$ و $B = 38n + 1$ و ليكن $d' = PGCD(A;B)$.

   – حدّد القيم الممكنة لـ d' ثمّ جد الأعداد الطبيعيّة التي يكون من أجلها العددان A و B أوّليان فيما بينهما .

4. L عدد طبيعي يكتب $\overline{1\beta\alpha\alpha\beta2}$ في نظام التعداد ذو الأساس 4 و يكتب أيضا $\overline{\alpha\beta\alpha41}$ في نظام التعداد ذو الأساس 5 .

   – جد العددين α و β ثمّ أكتب العدد L في النظام العشري .

5. أ) حلّل العدد 2025 إلى جداء عوامل أوّلية ثمّ استنتج الأعداد الطبيعيّة التي مربّع كلّ منها يقسم 2025 .

   ب) حدّد كلّ الثنائيات الطبيعيّة $(a;b)$ التي تحقق $m^2 - 8d^2 = 2025$ حيث $m = PPCM(a;b)$ و $d = PGCD(a;b)$.

التمرين الثالث : (04 نقاط)

(u_n) المتتالية المعرّفة بـ $u_0 = 1$ و من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = (2-u_n)e^{-u_n} + u_n$.

1. أ) بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - 2 = (1 - e^{-u_n})(u_n - 2)$.

   ب) برهن بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $0 < u_n < 2$.

2. بيّن أنّ المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثمّ استنتج أنّها متقاربة .

3. نضع $\alpha = (1 - e^{-2})$.

أ) استنتج مما سبق أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $0 < 1 - e^{-u_n} < \alpha$.

ب) بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $|u_{n+1} - 2| < \alpha |u_n - 2|$.

ج) بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $|u_n - 2| \leq \alpha^n$ ثمّ استنتج $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

4. من أجل كلّ عدد طبيعي n نضع : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

– بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $2(n+1) - \dfrac{1 - \alpha^{n+1}}{e^{-2}} \leq S_n \leq 2(n+1) + \dfrac{1 - \alpha^{n+1}}{e^{-2}}$ ثمّ استنتج $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{S_n}{n}$.

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I. g الدالّة العدديّة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = x - e^{-x}$.

1. أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ ، $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ ثمّ أحسب $g'(x)$ بدلالة x و شكّل جدول تغيّرات الدالّة g .

2. بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلّا وحيدا α حيث $0,5 < \alpha < 0,6$ ، ثمّ استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II. f الدالّة العدديّة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \dfrac{e^x - x}{e^x + 1}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. أ) أحسب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ ثمّ بيّن أنّ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ و احسب $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) + x]$ و فسّر النتيجتين بيانيّا .

ب) أدرس الوضعيّة النسبيّة بين (C_f) و المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = -x$.

2. أ) بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x ، $f'(x) = \dfrac{e^x g(x)}{(e^x + 1)^2}$.

ب) استنتج إتجاه تغيّر الدالّة f و شكّل جدول تغيّراتها .

ج) بيّن أنّ $f(\alpha) = 1 - \alpha$ ، ثمّ استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

3. أ) أرسم (Δ) و (C_f) . نأخذ $f(\alpha) \approx 0,4$.

ب) جد قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $f(x) = e^m$ حلين متمايزين بالضبط .

4. نسمّي S مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) و المستقيمين اللّذين معادلتيهما $x = -1$ و $x = 0$.

أ) بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي $x \in [-1; 0]$ ، $\dfrac{e^x}{e^x + 1} \leq \dfrac{(x+1)e^x}{e^x + 1} \leq \dfrac{1}{2}(x+1)e^x$.

ب) باستعمال تكامل بالتجزئة أحسب $\displaystyle\int_{-1}^{0} (x+1)\, e^x dx$ ثمّ استنتج أنّ $\ln\left(\dfrac{2e}{e+1}\right) \leq S \leq \dfrac{1}{2e}$.

5. (u_n) المتتالية العدديّة المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} (e^x + 1) f(x) dx$.

– أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

إنتهى الموضوع الثاني

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

البكالوريا التجريبية

امتحان تجريبي التعليم الثانوي الشعبة :تقني رياضي دورة: جوان 2025

اختبار في مادة: الرياضيات المدة: 04 سا و 30 د

على المترشح أن يختار احد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول : (05 نقاط)

I. نعتبر f الدالّة المعرّفة و المتزايدة تماما على المجال $[1;2]$ بـ : $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$.

– بيّن أنّه إذا كان $x\in[1;2]$ فإنّ $f(x)\in\left[\frac{1}{2};\frac{4}{5}\right]$.

II. لتكن (u_n) المتتالية المعرّفة بحدّها الأوّل $u_0=1$ و من أجل كلّ n عدد طبيعي ، $u_{n+1}=\dfrac{u_n^3+2}{u_n^2+1}$.

1. برهن بالتراجع أنّه من أجل كلّ n عدد طبيعي : $1\le u_n<2$.

2. أ) بيّن أنّه من أجل كلّ n عدد طبيعي : $u_{n+1}-u_n=\dfrac{2-u_n}{u_n^2+1}$.

ب) استنتج إتجاه تغيّر المتتاليّة (u_n) و تقاربها .

3. أ) بيّن أنّه من أجل كلّ n عدد طبيعي : $2-u_{n+1}=f(u_n)(2-u_n)$.

ب) استنتج أنّه من أجل كلّ n عدد طبيعي : $0<2-u_{n+1}\le\frac{4}{5}(2-u_n)$.

4. بيّن أنّه من أجل كلّ n عدد طبيعي : $0<2-u_n\le\left(\frac{4}{5}\right)^n$ ، ثمّ استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

التمرين الثاني : (04 نقاط)

يحتوي كيس غير شفاف على خمس كريات بيضاء تحمل الأرقام 0 , 1 , 2 ,2 ,3 وأربع كريات حمراء تحمل الأرقام 1 , 1 , 2 , 2 وكريتين خضراوين تحملان الرقمين 2 ,3.(كل الكرات متماثلة ولا يمكن التمييز بينها باللمس)

نسحب عشوائيا في آن واحد من الكيس ثلاث كريات و نعتبر الأحداث التالية : A : "الحصول على ثلاث كريات من نفس اللون"

B : "الحصول على ثلاث كريات من نفس الرقم" C : "الحصول على ثلاث كريات تحمل ألوان العلم الوطني"

1. أحسب الإحتمالات التالية : $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$ ، ثم بين أن $P(C\cap B)=\dfrac{14}{165}$ واستنتج $P(C\cup B)$.

2. نعتبر المتغير العشوائي Xالذي يرفق بكل سحب عدد الكريات الحمراء المتبقية في الكيس.

أ) حدّد قيم المتغير العشوائي X.

ب) عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X وأحسب أمله الرياضياتي ثم جد قيمة العدد a حتى يكون $E(11X+a)=2025$

3. نسحب الأن ثلاث كريات على التوالي بدون إرجاع

احسب احتمال الحدثين ، E : "الحصول على رقم اولي على الاقل" F : "الحصول على جداء الارقام معدوم".

التمرين الثالث : (04 نقاط)

1. نعتبر المعادلة : $21x-12y=6 ......(E)$ حيث x و y عددين صحيحين .

   أ) بين أن المعادلة (E) تقبل حلولا في Z^2 .

   ب) أثبت أنه إذا كانت الثنائية (x,y) حل للمعادلة (E) فإن : $y\equiv 3[7]$ ثم حل في Z^2 معادلة (E).

   ج) استنتج الثنائيات (x,y) حلول المعادلة (E) التي تحقق : $x+y$ مضاعف لـ 9 .

2. n عدد طبيعي، ليكن $d=PGCD(a;b)$ القاسم المشترك الاكبر للعددين $a_n=4n+2$ و $b_n=7n+3$.

   أ) بين أن : $PGCD(a,b)=PGCD(n+1,2)$ ، ثمّ حدّد حسب قيم العدد الطبيعي n القيم الممكنة لـ d .

   ب) استنتج $PGCD(4\times 2025^{1446}+2;7\times 2025^{1446}+3)$

3. نعتبر الأعداد الطبيعية A_n و B_n حيث : $A_n=7n^2+10n+3$ و $B_n=4n^2+6n+2$

   – بين أن العددان A_n و B_n يقبلان القسمة على $n+1$، ثمّ عبر حسب قيم n و بدلالة n عن القيم الممكنة لـ $PGCD(A_n,B_n)$.

التمرين الرابع : (07 نقاط)

لتكن f الدالّة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\dfrac{-2}{1+e^x}+1$ ، (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$.

1. أحسب كلّا من $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ثمّ فسّر النتائج بيانيّا .

2. بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x : $f'(x)=\dfrac{2e^x}{(1+e^x)^2}$ ، ثمّ استنتج إتجاه تغيّر الدالّة f و شكّل جدول تغيّراتها .

3. من أجل كلّ عدد حقيقي x أحسب $f(-x)+f(x)$ و فسّر النتيجة بيانيّا .

4. أكتب معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) عند مبدأ المعلم .

5. أ) أنشئ المماس (T) ثمّ أرسم (C_f) .

   ب) ناقش بيانيّا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x)=|m|x$.

6. أ) بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x ، $f(x)=\dfrac{2e^x}{1+e^x}-1$

   ب) أحسب $\mathcal{A}$ مساحة الحيّز المحدّد بـ (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها: $y=0$ ، $x=0$ و $x=\ln 2$.

7. من أجل كلّ عدد طبيعي n نضع : $u_n=(1+e^n)(f(n)+1)$ و $S_n=\ln u_0+\ln u_1+\cdots+\ln u_n$.

   أ) بيّن أنّ (u_n) متتالية هندسيّة يطلب تحديد أساسها و حدّها الأوّل .

   ب) أكتب S_n بدلالة n . ثمّ أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$.

إنتهى الموضوع الأوّل

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (04 نقاط)

لتكن (E) المعادلة ذات المجهولين الصحيحين x و y : (E) : .... $2x - 5y = 1$.

1. جد الحل الخاص $(x_0;y_0)$ الذي يحقق $x_0 = 3y_0$ ثمّ حل المعادلة (E) .
2. جد مجموعة قيم العدد الطبيعي λ الذي يحقق : $\begin{cases} \lambda \equiv 1447[5] \\ \lambda \equiv 2025[2] \end{cases}$.
3. جد الثنائيات الطبيعيّة $(x;y)$ حلول المعادلة (E) و التي تحقق $9^\lambda + x \times y \equiv 0[10]$.
4. ليكن N عددا طبيعيًا يكتب $\overline{23}$ في نظام التعداد الذي أساسه α و يكتب $\overline{54}$ في نظام التعداد الذي أساسه β .

   جد العددان الطبيعيّان α و β إذا علمت أنّ $3\beta - \alpha = 3$ ثمّ أكتب العدد $52N - 3$ في النظام العشري .

التمرين الثاني : (05 نقاط)

لتكن (u_n) المتتالية المعرّفة بحدّها الأوّل $u_1 = \frac{5}{2}$ و من أجل كلّ n عدد طبيعي غير معدوم $u_{n+1} = 3 - \dfrac{n}{2(n+1)}(3 - u_n)$.

1. برهن بالتراجع أنّه من أجل كلّ n عدد طبيعي غير معدوم : $u_n < 3$.
2. أ) بيّن أنّه من أجل كلّ n عدد طبيعي غير معدوم : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{n+2}{2(n+1)}(3 - u_n)$.

   ب) استنتج إتجاه تغيّر المتتاليّة (u_n) و تقاربها .
3. (v_n) المتتالية المعرّفة على $\mathbb{N}^*$ بـ $v_n = n(3 - u_n)$.

   أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسيّة أساسها $\frac{1}{2}$ يطلب حساب حدّها الأوّل .

   ب) أكتب عبارة v_n بدلالة n ثمّ بيّن أنّه من أجل كلّ $n \in \mathbb{N}^*$ ، $u_n = 3 - \dfrac{1}{n \times 2^n}$ ثمّ أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.
4. من أجل كلّ n عدد طبيعي غير معدوم نضع : $P_n = (u_1 - 3) \times (u_2 - 3) \times \cdots \times (u_n - 3)$.

   – بيّن أنّ $P_n = \dfrac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n(n+1)}}{n!}$.

التمرين الثالث : (04 نقاط)

يحتوي كيس غير شفاف على 10 كريات متماثلة لا نفرق بينها باللّمس منها كريّتين تحملان الرقم 1 و ثلاث كريات تحمل الرقم 2 و كريّتين تحملان الرقم 3 و كريّتين تحملان الرقم 5 و كرية تحمل الرقم 4. نسحب عشوائيا من الكيس كريّتين في آن واحد .و نعتبر الأحداث التاليّة :

A : " الحصول على كريّتين مجموع رقميهما يساوي 6 " B : "الحصول على كريّتين جداء رقميهما مضاعف للعدد 2 "

C : "الحصول على كريّتين تحملان رقمين أوّليين فيما بينهما " .

1. أحسب $P(A)$ و $P(B)$ ثمّ بيّن أنّ $P(C) = \dfrac{37}{45}$.
2. بيّن أنّ $P(A \cap C) = \dfrac{4}{45}$ ، ثمّ استنتج $P(\overline{A \cup C})$.

3. ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكلّ عمليّة سحب لكريّتين القاسم المشترك الأكبر للرّقمين المسجّلين عليهما .

أ) برّر أنّ قيم المتغيّر العشوائي X هي $\{1; 2; 3; 5\}$.

ب) عرّف قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي ثمّ استنتج $E(150X + 1835)$.

4. نعيد الكيس إلى وضعه الأوّل و نضيف له كرية تحمل الرقم 0 ثمّ نسحب منه أربع كريّات على التوالي دون إرجاع .

– أحسب احتمال الحصول على أربع كريات أرقامها تشكل العدد 2025 .

التمرين الرابع : (07 نقاط)

في كلّ ما يلي المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

I. g الدالّة العدديّة المعرّفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ : $g(x) = 1 - (x+1)\ln(x+1)$.

1. أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ ثمّ بيّن أنّ $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} -1} g(x) = 1$.

2. أ) أدرس إتجاه تغيّر الدالّة g و شكّل جدول تغيّراتها .

ب) بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلّا وحيدا α حيث $0,76 < \alpha < 0,77$

ثمّ استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1; +\infty[$ و بيّن أنّ $\ln(\alpha+1) = \dfrac{1}{\alpha+1}$.

3. نعتبر G الدالّة المعرّفة على $]-1; +\infty[$ بـ : $G(x) = x + \dfrac{1}{4}(x+1)^2\left[1 - 2\ln(x+1)\right]$.

أ) بيّن أنّ الدالّة G هي دالّة أصليّة للدالة g على المجال $]-1; +\infty[$.

ب) أحسب بدلالة α العدد $\mathcal{A}$ مساحة الحيّز المستوي المحدّد بـ (C_g) و المستقيمات التي معادلاتها $y = 0$ ، $x = 0$ و $x = \alpha$.

جـ) بيّن أنّ $\mathcal{A}(\alpha) = \left(\dfrac{1}{4}\alpha^2 + \alpha - \dfrac{1}{2}\right) u.a$

II. f الدالّة العدديّة المعرّفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ : $f(x) = e^{2-x}\ln(x+1)$ ، (C_f) تمثيلها البياني .

1. أ) أحسب $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} -1} f(x)$ و فسّر النتيجة بيانيّا .

ب) بيّن أنّه من أجل كلّ $x > -1$: $f(x) = e^3 \times \dfrac{x+1}{e^{x+1}} \times \dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$ ثمّ أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و فسّر النتيجة بيانيّا .

2. أ) بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي $x \in]-1; +\infty[$ ، $f'(x) = \dfrac{e^{2-x}}{x+1} g(x)$.

ب) استنتج إتجاه تغيّر الدالّة f و شكّل جدول تغيّراتها .

3. أكتب معادلة لـ (T) مماس (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

4. أرسم (T) و (C_f) . نأخذ $f(\alpha) \approx 1,95$.

5. جد قيم الوسيط الحقيقي الموجب تماما m حتى تقبل المعادلة $f(x) = e^2 x + \ln(m)$ حلين متمايزين .

إنتهى الموضوع الثاني

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

البكالوريا التجريبية

امتحان بكالوريا تجريبي التعليم الثانوي الشعبة :علوم تجريبية دورة: جوان 2025

اختبار في مادة: الرياضيات المدة: 03 سا و 30 د

على المترشح أن يختار احد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول : (05 نقاط)

لتكن (u_n) المتتالية المعرّفة بحدّها الأوّل $u_1 = \frac{5}{2}$ و من أجل كلّ n عدد طبيعي غير معدوم $u_{n+1} = 3 - \frac{n}{2(n+1)}(3-u_n)$.

1. برهن بالتراجع أنّه من أجل كلّ n عدد طبيعي غير معدوم : $u_n < 3$.
2. أ) بيّن أنّه من أجل كلّ n عدد طبيعي غير معدوم : $u_{n+1} - u_n = \frac{n+2}{2(n+1)}(3-u_n)$.

   ب) استنتج إتجاه تغيّر المتتاليّة (u_n) و تقاربها .
3. (v_n) المتتالية المعرّفة على $\mathbb{N}^*$ ب $v_n = n(3-u_n)$.

   أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسيّة أساسها $\frac{1}{2}$ يطلب حساب حدّها الأوّل .

   ب) أكتب عبارة v_n بدلالة n ثمّ بيّن أنّه من أجل كلّ $n \in \mathbb{N}^*$ ، $u_n = 3 - \frac{1}{n \times 2^n}$ ثمّ أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.
4. من أجل كلّ n عدد طبيعي غير معدوم نضع : $S_n = u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \cdots + nu_n$.

   – أكتب عبارة S_n بدلالة n .

التمرين الثاني : (04 نقاط)

في كلّ حالة مما يأتي توجد إجابة وحيدة صحيحة إخترها مع التبرير

1. الشكل الأسّي للعدد المركّب $z = ie^{i\frac{\pi}{2}}$ هو

-أ- $z = e^{i\pi}$	-ب- $z = ie^{i\pi}$	- ج- $z = e^{i\frac{\pi}{2}}$

2. الشكل الجبري للعدد المركب $z = 1 + i + i^2 + i^3 + \cdots + i^{2024}$ هو :

-أ- $z = i$	-ب- $z = 1$	- ج- $z = -i$

3. المعادلة $5z^2 - 3|z|^2 + 6 - 10i = 0$ تقبل حلّين مركّبين هما :

-أ- $z_1 = -1-i, z_2 = 1-i$	-ب- $z_1 = -i, z_2 = i$	- ج- $z_1 = -1-i, z_2 = 1+i$

4. العدد $z = (1+2i)^{2025} + (1-2i)^{2025}$:

-أ- معدوم	-ب- تخيلي صرف	- ج- حقيقي

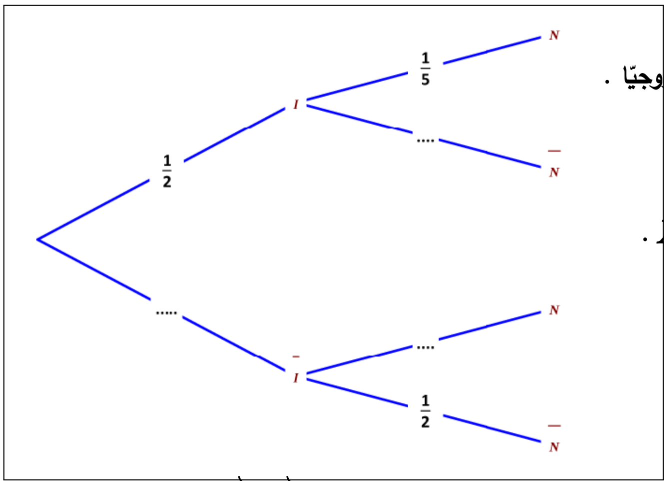
التمرين الثالث : (04 نقاط)

يحتوي صندوق على أربع كريات سوداء و كريّة واحدة بيضاء (كل الكريات متماثلة لانفرّق بينها باللّمس) ، نعتبر اللّعبة التالية : يقوم لاعب برمي زهرة نرد متوازن مرقّم من 1 إلى 6 ، إذا كان الرقم الظاهر فرديّا نضيف كريّة بيضاء إلى الصندوق و إذا كان الرقم الظاهر زوجيّا نضيف كريّة سوداء إلى الصندوق بعد ذلك يسحب اللّاعب ثلاث كريّات في آن واحد من الصندوق ، نسمّي الأحداث I : " الرقم الظاهر فردي " N : "الكريّات الثلاث المسحوبة سوداء "

1. أحسب $P(I)$ ، $P_I(N)$ ، $P(N \cap I)$

2. أ) أنقل ثمّ أكمل شجرة الاحتمالات التي تنمذج هذه الوضعيّة .

ب) بيّن أنّ $P(N) = \frac{7}{20}$



3. علما أنّ الكريات المسحوبة كلّها سوداء ما احتمال أن يكون الرقم الظاهر زوجيّا .

4. ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يمثل عدد الكريّات البيضاء المسحوبة .

أ) بيّن أنّ $P(X = 1) = \frac{11}{20}$، ثمّ عرّف قانون الاحتمال للمتغيّر X .

ب) أحسب $E(x)$ الأمل الرياضياتي ثمّ استنتج قيمة العدد الحقيقي α حتى يكون $E(3X - \alpha) = 2025$.

التمرين الرابع : (07 نقاط)

الدالّة f معرّفة على $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = \ln x - \frac{(\ln x)^3}{3}$، (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1. أحسب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$ و فسّر النتائج بيانيّا ثمّ أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2. أ) بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي $x > 0$ ، $f'(x) = \frac{(1 - \ln x)(1 + \ln x)}{x}$.

ب) حل في المجال $]0; +\infty[$ المتراجحة $(1 - \ln x)(1 + \ln x) < 0$ ، ثمّ استنتج إتجاه تغيّر الدالّة f و شكّل جدول تغيّراتها .

3. أكتب معادلة لـ (T) مماس (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

4. بيّن أنّه من أجل كلّ $x > 0$ ، $f(x) = \frac{(\ln x)(3 - (\ln x)^2)}{3}$ ثمّ استنتج النقاط الثلاث التي يتقاطع فيها (C_f) و محور الفواصل .

5. أنشئ المماس (T) ثمّ ارسم المنحنى (C_f) على المجال $]0; e^2]$.

6. الدالّة H معرّفة على $]0; +\infty[$ بـ : $H(x) = x\left[(\ln x)^3 - 3(\ln x)^2 + 6\ln x - 6\right]$.

أ) بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي $x \in]0; +\infty[$ ، $H'(x) = (\ln x)^3$.

ب) أحسب $\mathcal{A}$ مساحة الحيّز المستو المحدّد بـ (C_f) ومنحنى الدالّة $x \mapsto \ln x$ و المستقيمين اللّذين معادلتيهما $x = 1$ و $x = e$.

7. الدالة g معرّفة على $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = |\ln x|\left(1 - \frac{(\ln x)^2}{3}\right)$، (C_g) تمثيلها البياني في المعلم السابق .

أ) بيّن أنّه من أجل كلّ $x \in [1; +\infty[$ ، $g(x) = f(x)$ و من أجل كلّ $x \in]0; 1[$ ، $g(x) = -f(x)$.

ب) إشرح كيفيّة رسم (Cg) إنطلاقا من (Cf) ثمّ ارسمه في المعلم السابق .

إنتهى الموضوع الأوّل

الموضوع الثاني

التمرين الأوّل : (04 نقاط)

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-(2+\sqrt{2})z+2+\sqrt{2}=0$.

2. ليكن a العدد المركّب المُعرّف بـ : $a=1+\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$

أ) بيّن أنّ $|a|=\sqrt{2+\sqrt{2}}$. حيث $|a|$ تمثل طويلة العدد المركب a .

ب) بيّن أنّ $a=1+e^{i\frac{\pi}{4}}$ ، ثمّ استنتج أنّ $a=2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)e^{i\frac{\pi}{8}}$.

3. استنتج قيمة كُلّا من $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ و $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

4. أ) بيّن أنّ العدد a^{2020} تخيّلي صرف و أنّ a^{2024} حقيقي .

ب) جد أكبر قيمة للعدد الطبيعي n حتى يكون $|a|^n<2025$.

جـ) جد مجموعة النقط M ذات اللّاحقة z من المستوي التي تحقق $|z-a|=|-8+6i|$.

التمرين الثاني : (05 نقاط)

لتكن (u_n) المتتالية المعرّفة بحدّها الأوّل $u_0=\frac{3}{2}$ و من أجل كلّ n عدد طبيعي ، $u_{n+1}=\frac{\sqrt{3u_n^2+4}}{2}$.

1. برهن بالتراجع أنّه من أجل كلّ n عدد طبيعي : $0<u_n<2$.

2. أ) بيّن أنّه من أجل كلّ n عدد طبيعي : $u_{n+1}^2-u_n^2=\frac{(2-u_n)(2+u_n)}{4}$.

ب) استنتج إتجاه تغيّر المتتاليّة (u_n) و تقاربها .

3. (v_n) المتتالية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ $v_n=u_n^2-4$.

أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسيّة أساسها $\frac{3}{4}$ يطلب حساب حدّها الأوّل .

ب) أكتب عبارة v_n بدلالة n ثمّ بيّن أنّه من أجل كلّ $n\in\mathbb{N}$ ، $u_n=\sqrt{4-\frac{7}{4}\times\left(\frac{3}{4}\right)^n}$ ثمّ أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

4. من أجل كلّ n عدد طبيعي نضع : $S_n=\ln\left[v_0\left(\frac{1}{2}-1\right)\right]+\ln\left[v_1\left(\frac{1}{3}-1\right)\right]+\cdots+\ln\left[v_n\left(\frac{1}{n+2}-1\right)\right]$.

– أكتب عبارة S_n بدلالة n .

التمرين الثالث : (04 نقاط)

لدينا حجر نرد مغشوش مكعّب الشكل أوجهه مرقّمة من 1 إلى 6 . نسمّي P_n إحتمال الحصول على الرقم n مع $1\le n\le 6$ ، الأعداد P_1 ، P_2 ، P_3 ، P_4 ، P_5 ، P_6 بهذا الترتيب تُشكّل حدودا متتابعة من متتالية حسابيّة و الأعداد P_1 ، P_2 ، P_4 بهذا الترتيب تُشكّل حدودا متتابعة من متتالية هندسيّة .

1. بيّن أنّ $P_1=r=\frac{1}{21}$ ، ثمّ بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي $1\le n\le 6$: $P_n=\frac{n}{21}$.

2. نرمي النرد السابق مرّة واحدة و نسجّل الرقم الظاهر بعد استقرار النرد . أحسب احتمال تحقق الأحداث التالية :

A : " الحصول على رقم زوجي " B : "الحصول على مربّع تام "

3. ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يأخذ كقيمة 2025 إذا كان الرقم الظاهر زوجيا و يأخذ كقيمة -1446 في باقي الحالات

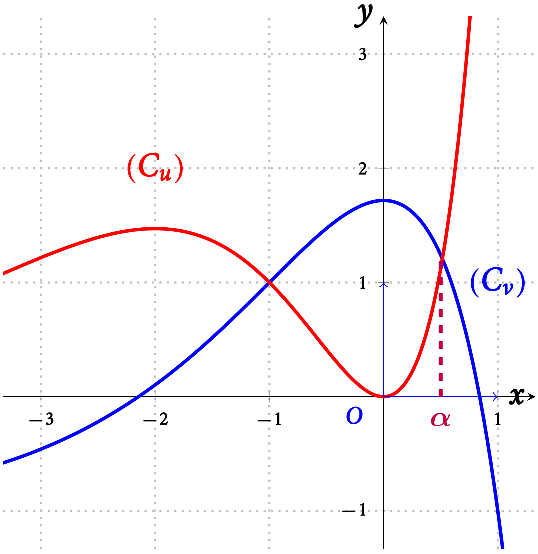
أ) عرّف قانون احتمال المتغيّر العشوائي X .

ب) أحسب $E(X)$ الأمل الرياضياتي للمتغيّر العشوائي X .

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I. المستوي منسوب الى معلم متعامد ومتجانس، في الشكل المقابل (C_u) و (C_v) هما على الترتيب التمثيلان البيانيان للدالتين العدديتين المعرفتين على $\mathbb{R}$ بـ : $u(x) = x^2e^{x+1}$ و $v(x) = (1-x)e^{x+1} - 1$ ، (C_u) و (C_v) يتقاطعان في نقطتين احداهما فاصلتها α تحقق : $0.50 < \alpha < 0.52$

و g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = (x^2 + x - 1)e^{x+1} + 1$



1. بقراءة بيانية حدد $v(-1)$ و $u(-1)$

2. أ) حدد حسب قيم العدد الحقيقي x من $\mathbb{R}$ وضعية (C_u) بالنسبة إلى (c_v)

ب) تحقق ان $g(x) = u(x) - v(x)$ ، ثم حدد تبعا لقيم x اشارة $g(x)$.

II. نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$f(x) = x + 1 - (x^2 + x)e^{-x+1}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. أ) احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ ، ثم بيّن أن $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = g(-x)$.

ج) بين أنّ الدالة f متزايدة تماما على كل من $]-\infty, -\alpha]$ و $[1, +\infty[$ ومتناقصة تماما على $[-\alpha, 1]$ ثم شكل جدول تغيراتها.

2. أ) بيّن أنّ المستقيم (d) ذو المعادلة $y = x + 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

ب) أدرس الوضع النسبي للمستقيم (d) و المنحنى (C_f) .

3. ارسم المستقيم (d) و المنحنى (C_f). نأخذ ($f(-\alpha) \approx 1.62$) .

4. حدّد قيم الوسيط الحقيقي الموجب تماما m حتى تقبل المعادلة المعادلة : $f(x) = \ln(m)$ حلان موجبان تماما و حل سالب تماما .

5. الدالة العددية h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x) = 1 - |x| - (x^2 - |x|)e^{|x|+1}$ و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق .

أ) بين أن الدالة h زوجية ثمّ بيّن أنّه من أجل كلّ $x \in]-\infty; 0]$ ، $h(x) = f(x)$.

ب) إشرح طريقة رسم المنحنى (C_h) إنطلاقا من (C_f) ، ثم ارسمه .

إنتهى الموضوع الثاني